Formation ISN - A.2

Représentation numérique des données analogiques

Julien Lefèvre

Université d'Aix-Marseille (AMU)
julien.lefevre@univ-amu.fr

17 Février 2012

Références

- Cours du master SIS
- Un cours sur le site du zéro.
- Références pléthoriques par ailleurs

Les transparents et programmes du cours se trouveront sur le site de l'IREM de Marseille : http ://isn.irem.univ-mrs.fr/.

A Information numérique

A.2 Représentation numérique des données analogiques

1. Domaines d'applications.
2. Echantillonnage et représentation de données analogiques.
3. Formats. Conversion. Transcodage.
4. Opérations numériques sur des données analogiques.
5. Compression avec perte. L'exemple du JPEG.
6. Autres utilisations de la visualisation

1 - Domaines d'applications

- Signal : synthèse de son, reconnaissance vocale
- Image : imagerie médicale, imagerie satelitaire, astronomie, vision par ordinateur
- Modèles 3D : C.A.O., Jeux vidéos, animation
- Autres : simulation numérique

2 - Echantillonnage et représentation de données analogiques

- Données analogiques : données physiques
- Numérisation : passage du physique/matériel au symbolique
- Introduction d'une quantification et d'un échantillonnage : perte d'information
- Que perçoit le cerveau (vu également comme une instrument de numérisation !) en fin de compte ?

Numérisation d'un signal

- On part d'un signal $s(t)$ qui peut-être vu comme continu, par exemple une onde acoustique.
- **Echantillonnage** à intervalles de temps réguliers $t_1 < t_2 < ... < t_N$ de valeurs du signal $s_n = s(t_n) \in \mathbb{R}$.
- **Quantification** du signal. Les valeurs s_n sont codées sur un alphabet de B bits.

Cas du son

- Fréquences perçues par l'oreille humaine $20 < f < 22000$ Hz.
- Fréquence d'échantillonnage 44 kHz (CD) jusqu'à 192kHz.
- Quantification sur 16 (CD), 24 ou 32 bits.

Image matricielle

Tableau de dimension $L \times H$. Dans chaque case un pixel qui code un niveau de gris ou une couleur (triplet de valeurs).

Cas de l'image

- dpi : dots per inch (1 inch=2.54cm). Détail d'une image à 300 dpi=85 μm
- On parle de dpi uniquement au moment de l'affichage sur un support
- Résolution à adapter.
  Oeil humain perçoit 1mm à 3m.
  Feuille de papier : 300 dpi
  Moniteur 17" : 96 dpi
  Television Full HD, 37" : 60 dpi

- La résolution

150 dpi

75 dpi

- La résolution

25 dpi

12 dpi

Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon

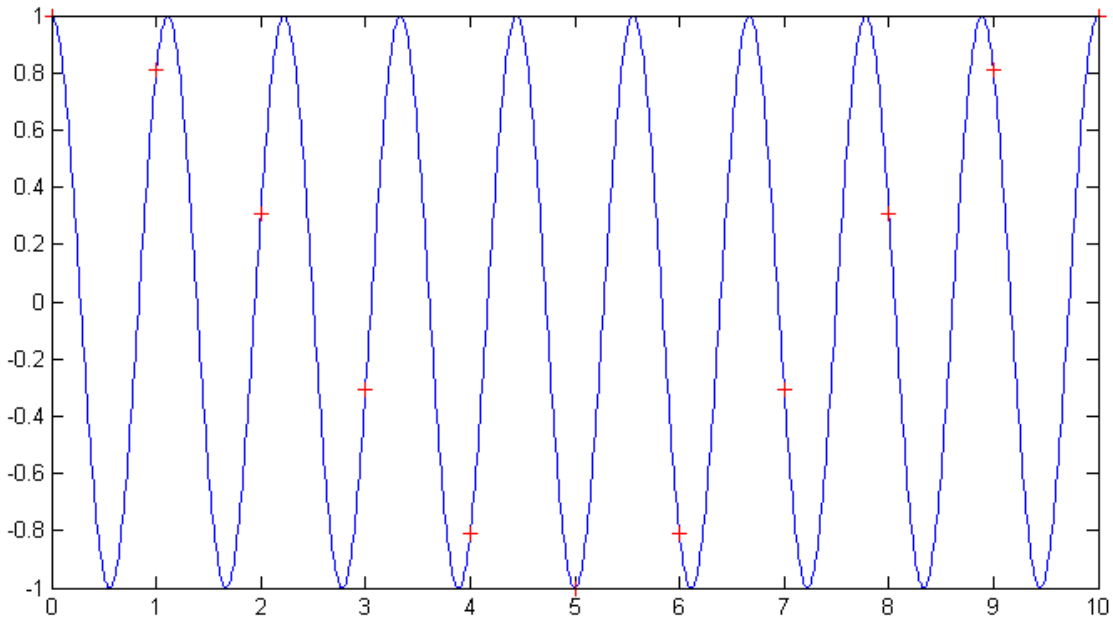
Pour bien échantillonner un signal de fréquence f, il suffit que la fréquence d'échantillonnage f_e vérifie

$$f_e > 2f$$

Phénomènes de repliement de spectre ou "aliasing" :

Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon

Compréhension du phénomène : On considère un signal "continu" $\cos(2\pi ft)$ échantillonné avec un pas T_e.
Par exemple, $f = 0.9$ et $T_e = 1$



3 - Formats. Conversion. Transcodage

Formats d'images

- Matricielle ou vectorielle
- Propriétaire ou libre, ouvert ou fermé
- Normalisé ou non
- Compression avec ou sans perte

Un résumé bien fait.

Quelques exemples

Format simple : PGM (ASCII ou binaire)
Format plus complexe : JPEG ou JPEG 2000 (voir plus loin)

3 - Formats. Conversion. Transcodage

Formats audios

- Sans compression (WAV, AIFF)
- Compression avec (MP3, OGG) ou sans perte (FLAC)

Un autre résumé.

Formats vidéos

- Codecs : MJPEG, DV, MPEG
- Conteneurs vidéos : AVI, QuickTime, MP4, OGM

Un autre résumé.

3 - Formats. Conversion. Transcodage

Conversion. Transcodage

Paramètres utilisés dans les formats de codage

- Audio : Fréquence d'échantillonnage, quantification, canaux, durée
- Image : résolution (dpi), profondeur (information par pixel), dimension

Se résument à fréquence spatiale et/ou temporelle, quantification

Influence sur la perception auditive/visuelle

3 - Formats. Conversion. Transcodage

Influence de la quantification sur la perception visuelle

Originale (8 bits), 6 bits, 4 bits, 3 bits

4 - Opérations numériques

Quelques Exemples

- Modifications élémentaires, format, taille, fréquence, contraste
- Filtrage (son, image)
- Algorithmes pour le traitement d'images :
  Débruitage (filtre moyen, médian), défloutage, inpainting
  Segmentation par seuillage ou morphologie mathématique.

Une bonne référence

4 - Opérations numériques

Histogrammes et opérations élementaires

Histogramme : Distribution des intensités de l'image.
Seuillage : binarisation obtenue à partir d'un seuil.
Changement de contraste : Transformation (linéaire) pour augmenter (ou réduire) la dynamique d'une image.

Tatouage numérique

Dissimuler de l'information dans une image. Dans le domaine spatial (dans un fond uniforme par exemple), ou dans le domaine spectral pour plus de robustesse.

4 - Opérations numériques

Filtrage

On peut avoir des filtres linéaires :

$$(Fs)(t) = \sum_{k=-p_1}^{p_2} s(t+k)f(k)$$

ou non-linéaires :

$$(Fs)(t) = \mathcal{F}\Big(\{s(t+k)\}_{k=-p_1 \ldots p_2}\Big)$$

Quelques exemples :

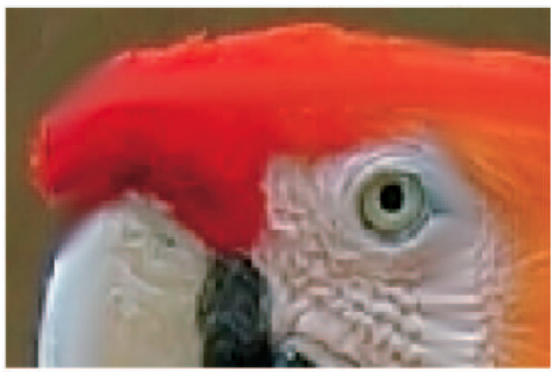
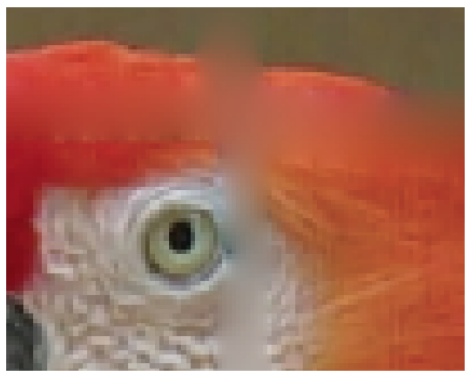
- Filtre moyen
- Filtre médian
- Dérivation (directionnelle)
- Gradient/Laplacien

4 - Opérations numériques

Inpainting

Consiste à retrouver des parties manquantes d'une image ou à en faire disparaître d'autres. Grand nombre de méthodes, au formalisme parfois compliqué (équation aux dérivées partielles) ou parfois plus intuitif (moyennes non-locales).

Méthode de Tschumperlé et Deriche (2005) vs méthode simpliste

Le son et l'image en Python

- Modules wave, pyaudio
- Module Image ou module matplotlib
- Combinés à numpy et scipy pour les opérations numériques

5 - Compression avec perte. L'exemple du JPEG

Extraits du cours d'analyse d'images du Master SIS, Université Aix-Marseille

- Compression JPEG

  - Norme spécifié en 1991 par le Joint Photographic Experts Group résultant de travaux menés dans les années 80.

  http://www.w3.org/Graphics/JPEG/itu-t81.pdf

  - Méthode de compression avec pertes

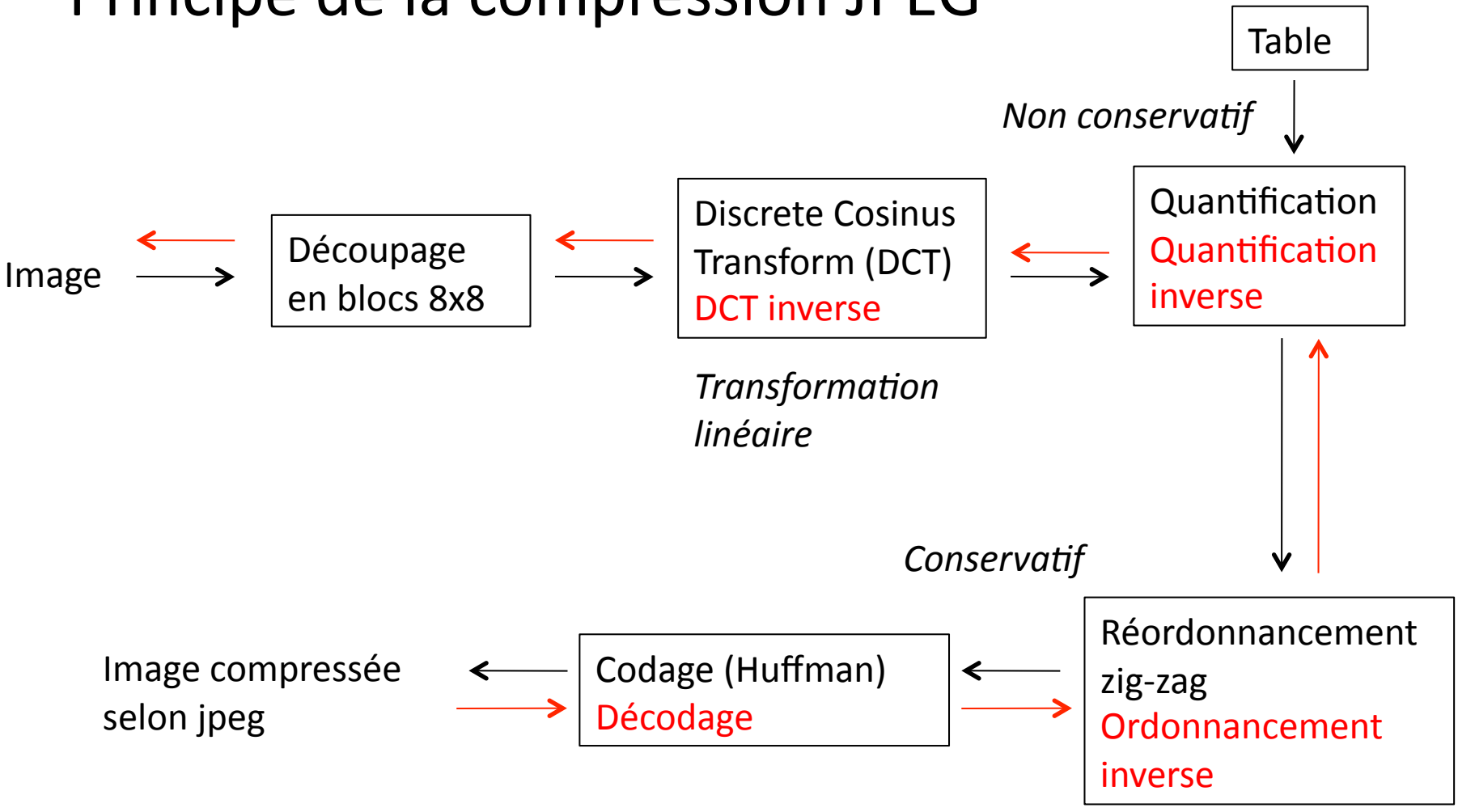
  - Permet des taux de compression de 3 à 100 (contre 3 pour des compressions sans pertes)

- Compression JPEG

  Réduction de redondances :

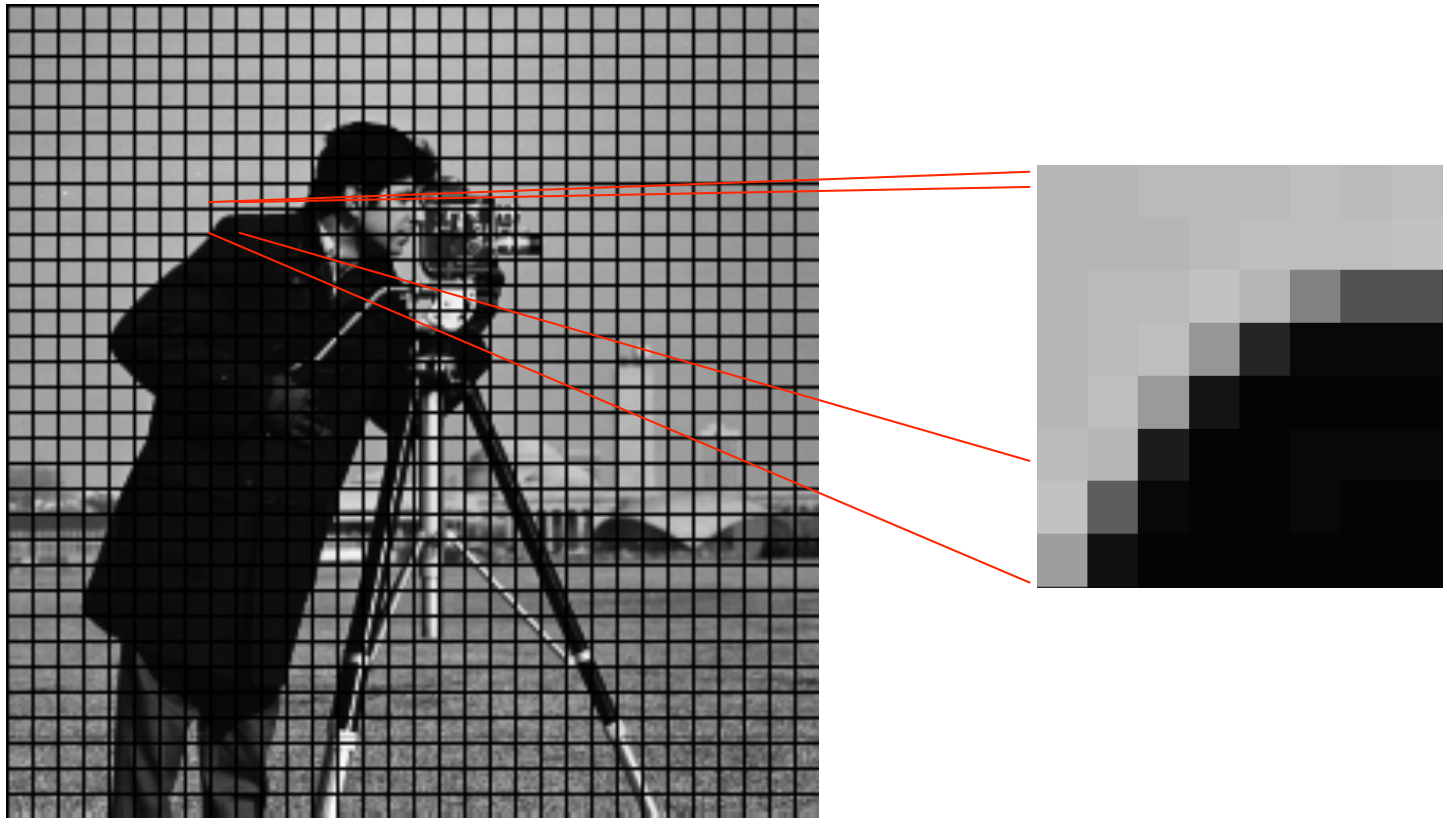
  - spatiales, par application de la DCT (variante de transformée de Fourier)
  - subjectives, par quantification selon un critère psychovisuel
  - statistiques, par codage (Huffman)

- Principe de la compression JPEG



- Découpage en blocs 8x8

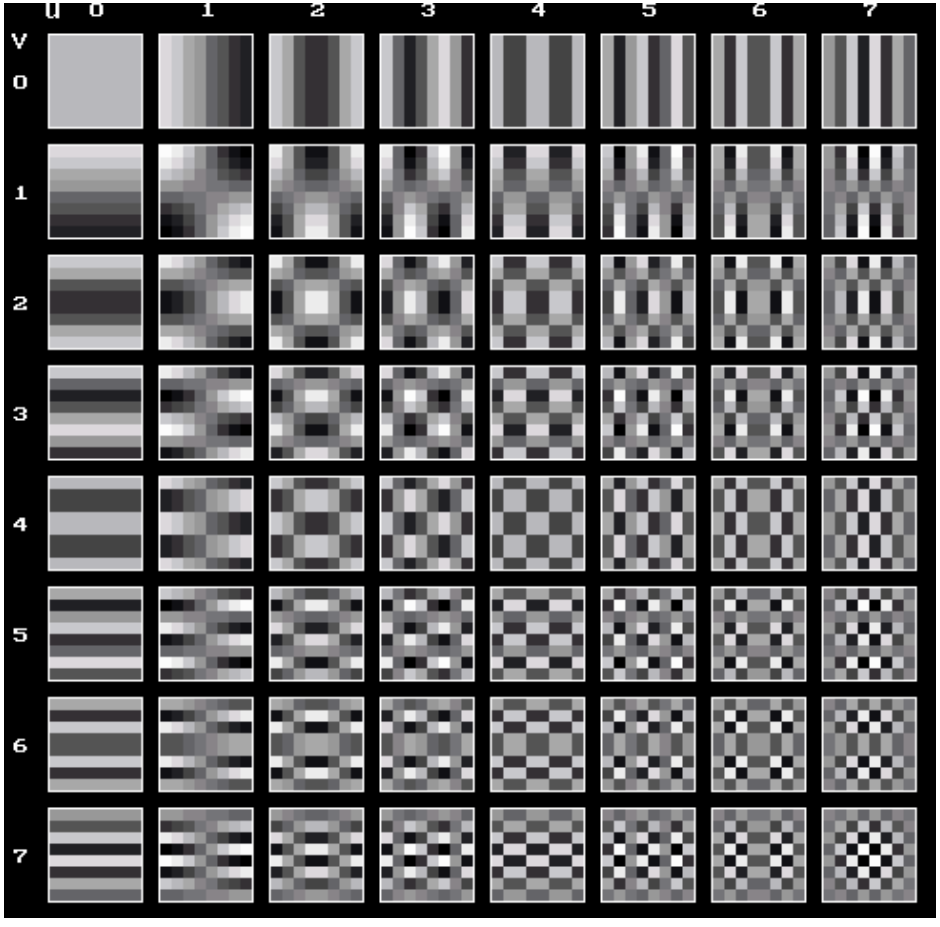
  Contrainte sur le temps de calcul de la DCT sur chaque bloc



- La transformée en cosinus discrète (DCT)

Un bloc 8x8 se décompose donc dans une base de 64 imagettes.

En haut à gauche les basses fréquences
En bas à droite les hautes fréquences



- La transformée en cosinus discrète (DCT)

  Variante de la transformée de Fourier

$$C(u,v) = \frac{2}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{(0,0)}(u,v)} \sum_{x=0}^{n-1}\sum_{y=0}^{n-1} I(x,y)\cos\left(\pi\frac{(2x+1)u}{n}\right)\cos\left(\pi\frac{(2y+1)v}{n}\right)$$

  Transformée inverse

$$I(x,y) = \sum_{u=0}^{n-1}\sum_{v=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{(0,0)}(u,v)} C(u,v)\cos\left(\pi\frac{(2x+1)u}{n}\right)\cos\left(\pi\frac{(2y+1)v}{n}\right)$$

  On l'applique sur des valeurs centrées dans [-128,127]

- La transformée en cosinus discrète (DCT)

  On a donc la décomposition suivante du bloc 8x8 :

$$I(x,y) = \sum_{u=0}^{n-1} \sum_{v=0}^{n-1} C(u,v) F_{u,v}(x,y)$$

  avec

$$F_{u,v}(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\delta_{(0,0)}(u,v)} \cos\left(\pi \frac{(2x+1)u}{n}\right) \cos\left(\pi \frac{(2y+1)v}{n}\right)$$

- La transformée en cosinus discrète (DCT)

  - Avantage de cette base de décomposition :

  Certaines composantes C(u,v) (hautes fréquences) ont une contribution moins importante (que pour les basses fréquences).

  Ce n'est pas le cas dans la base canonique.

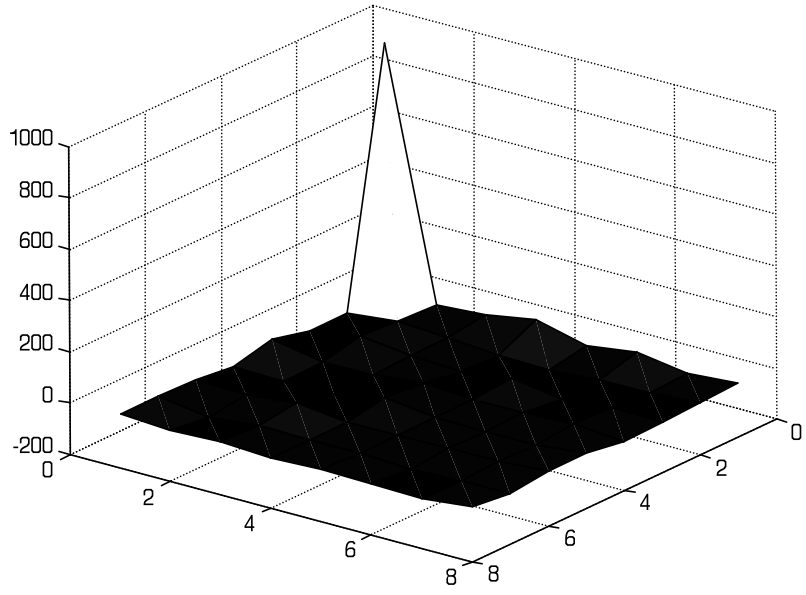
  - Grace à des techniques similaires à la FFT on peut arriver à calculer la DCT en 40 multiplications et 56 additions (au lieu de 4096 respectivement par la force brute)

- La transformée en cosinus discrète (DCT)

  Exemple :

Bloc 8x8

DCT



DCT

La plupart des hautes fréquences ont une contribution moins importante

- La transformée en cosinus discrète (DCT)

  Exemple :

DCT inverse de la DCT de départ en ne gardant que les 3 plus basses fréquences

- La quantification

  - Phase non conservatrice

  - Chaque élément de la DCT est divisé par un nombre (quantum) spécifié par une table 8x8 (matrice de quantification) et arrondi à l'entier le plus proche

  - La valeur du quantum est d'autant plus élevé qu'elle est éloignée du coin supérieur gauche

  - La matrice de quantification sont transmises avec l'image mais ne sont pas adaptées au bloc à traiter

- La quantification

Exemple de matrice de quantification

$$Q = \begin{bmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{bmatrix}$$

F*=entier le plus proche(F/Q)

F=

972	-10	-13	27	-13	2	8	10
0	7	20	-15	-21	-3	-20	-3
19	-4	-5	-9	-19	23	2	8
52	-18	-15	6	20	-3	-7	-5
-1	-25	14	0	1	-4	-2	1
23	-12	-21	2	-5	-3	-17	-3
-1	-12	4	5	-6	-1	-6	-6
11	1	-7	-10	14	11	-6	11

F*=

61	-1	-1	2	-1	0	0	0
0	1	1	-1	-1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
4	-1	-1	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

- Matrice de quantification

  - Elle permet de régler le niveau de compression = choisir la perte de qualité

  - Spécification JPEG n'impose aucune contrainte mais il y a des recommandations basées sur des seuils psychophysiques

  - Standard JPEG: Matrice précédente (Luminance), Qualité=50,

  Qualité<50: M*50/Q, Qualité>50: M*(100-Q)/50

  - Est parfois mentionné aussi $M_{i,j}=1/(1+K(1+i+j))$

  K est un facteur de qualité (1 à 25)

- Le codage

  Les valeurs quantifiées vont être codées de deux façons :

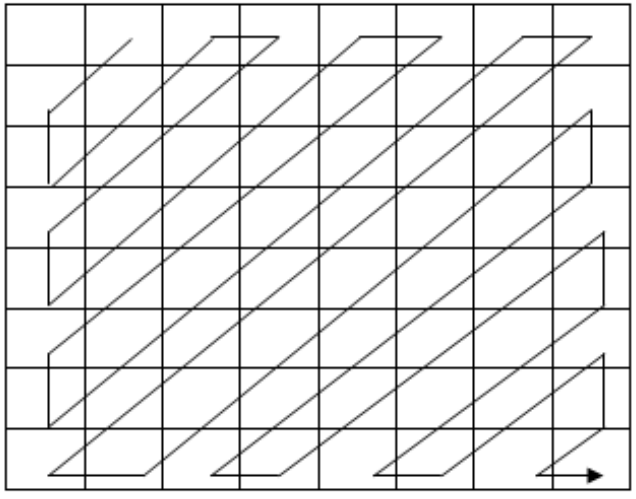
  - Le coefficient DC, associé à (0,0), varie en général peu d'un bloc à l'autre (valeur moyenne des pixels)

  On le code donc par E(k)=DC(k)-DC(k-1) « codage prédictif »

  - Les autres coefficients comportent beaucoup de zéros et on les réordonne donc selon un ordre de parcours en zig-zag qui favorise le rapprochement des valeurs voisines.

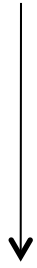
- # Le codage

  ## Parcours en zig-zag



F*=

61	-1	-1	2	-1	0	0	0
0	1	1	-1	-1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
4	-1	-1	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0



0 -1 1 1 -1 4 0 1 2 0 -1 0 -1 -1 1 -1 -1 0 -1 EOB

- Le codage

  - Codage RLE (Run Length Encoding)

  Codage par longueur de plages

  0 -1 1 1 -1 4 0 1 2 0 -1 0 -1 -1 1 -1 -1 0 -1 EOB

  - Puis codage de Huffman

  Codage qui se base sur la fréquence d'apparition des valeurs

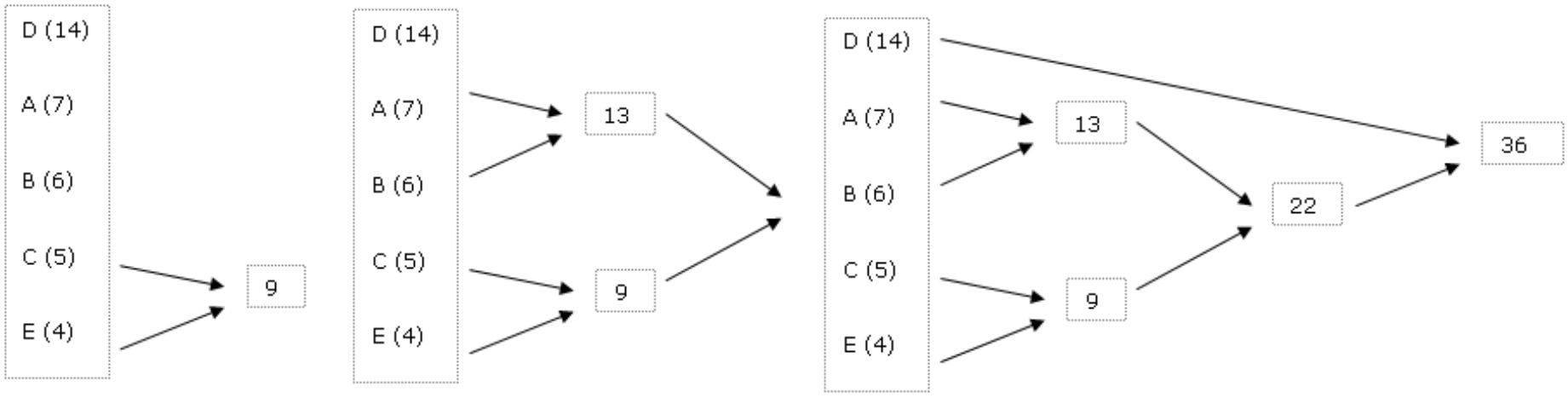
  Utilisé aussi sur la partie DC

- Le codage de Huffman

  - Exemple :

  Message de 36 lettres composé de A,B,C,D,E avec les fréquences 7,6,5,14,4

  - Construction d'un arbre

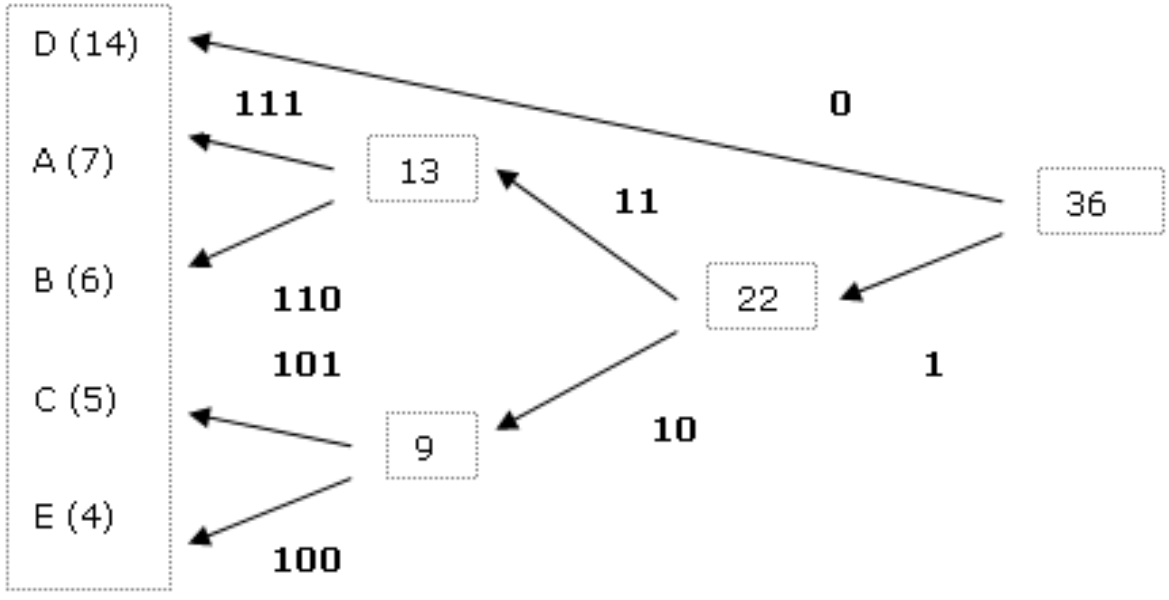


- Le codage de Huffman

  Code final :

  A : 111, B : 110, C : 101, D : 0, E : 100

  La table de Huffman peut être transmise avec l'image JPEG



- # Décompression

Résultat de la décompression sur l'exemple précédent

Bloc initial

115	133	128	133	135	139	162	133
128	125	133	105	103	117	115	104
115	123	120	108	110	112	120	101
109	125	104	100	120	131	115	114
131	107	112	119	137	122	115	132
126	118	112	127	142	149	119	121
125	111	136	143	151	137	128	110
119	96	125	101	109	130	123	110

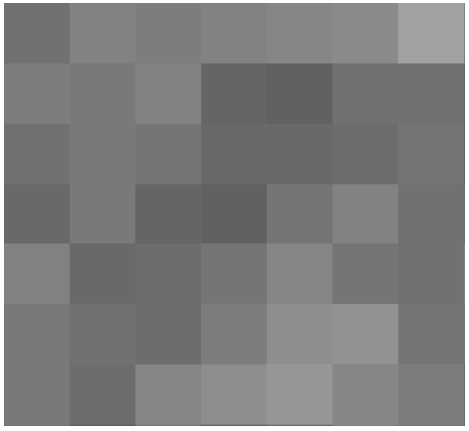
Bloc décompressé

119	136	139	128	132	148	147	130
119	129	124	108	108	122	120	105
122	126	117	101	102	114	114	102
117	119	115	109	115	127	126	115
111	113	115	119	130	137	130	118
124	122	124	133	143	144	132	118
131	123	120	130	141	141	129	118
118	106	99	109	123	125	118	111

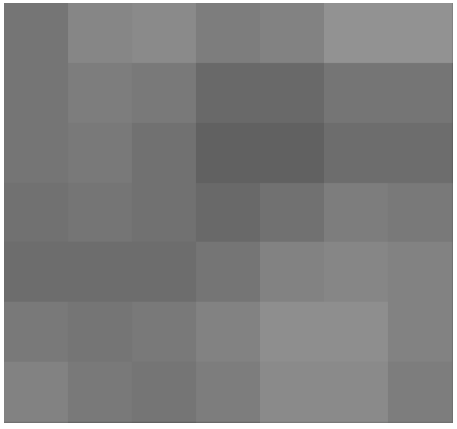
Matrice des erreurs

4	3	11	-5	-3	9	-15	-3
-9	4	-9	3	5	5	5	1
7	3	-3	-7	-8	2	-6	1
8	-6	11	9	-5	-4	11	1
-20	6	3	0	-7	15	15	-14
-2	4	12	6	1	-5	13	-3
6	12	-16	-13	-10	4	1	8
-1	10	-26	8	14	-5	-5	1

- Décompression

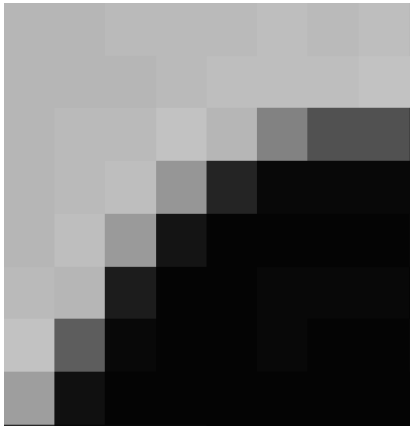


Bloc
initial

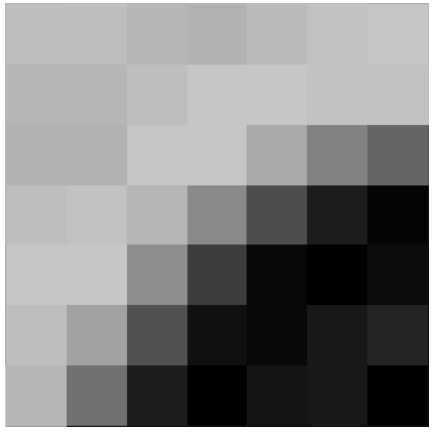


Bloc
décompressé

- Décompression



Bloc
initial



Bloc
décompressé

- Qualité de la compression

1:41

1:71

1:108

- Bilan sur le JPEG

  Pourquoi est ce que cela fonctionne ?

  - Propriété mathématique selon la régularité des signaux

  - Parce que l'on opère sur des blocs de petite taille où de grandes variations de l'image sont peu probables.

  - Parce que la quantification détruit des détails peu perceptibles, l’œil est peu sensible aux variations d’intensités.

  - Parce que l'organisation des données augmente l'efficacité des programmes de compression.

- Bilan sur le JPEG

  Inconvénients :

  - Inadapté aux images comportant du texte

  - Effet de « mosaïque » aux forts taux de compression, du à la décomposition en blocs 8x8

  - Phénomène de Gibbs au voisinage des contours

- Au-delà du JPEG : le JPEG 2000

Image originale

Compression
JPEG 2000 0.5 ko

Compression
JPEG 0.5 ko

- Le JPEG 2000

  - La différence essentielle avec le JPEG a lieu à l'étape de DCT. On utilise à la place une **analyse en ondelettes**.

  - Ce type d'analyse est plus adapté aux propriétés locales de l'image.

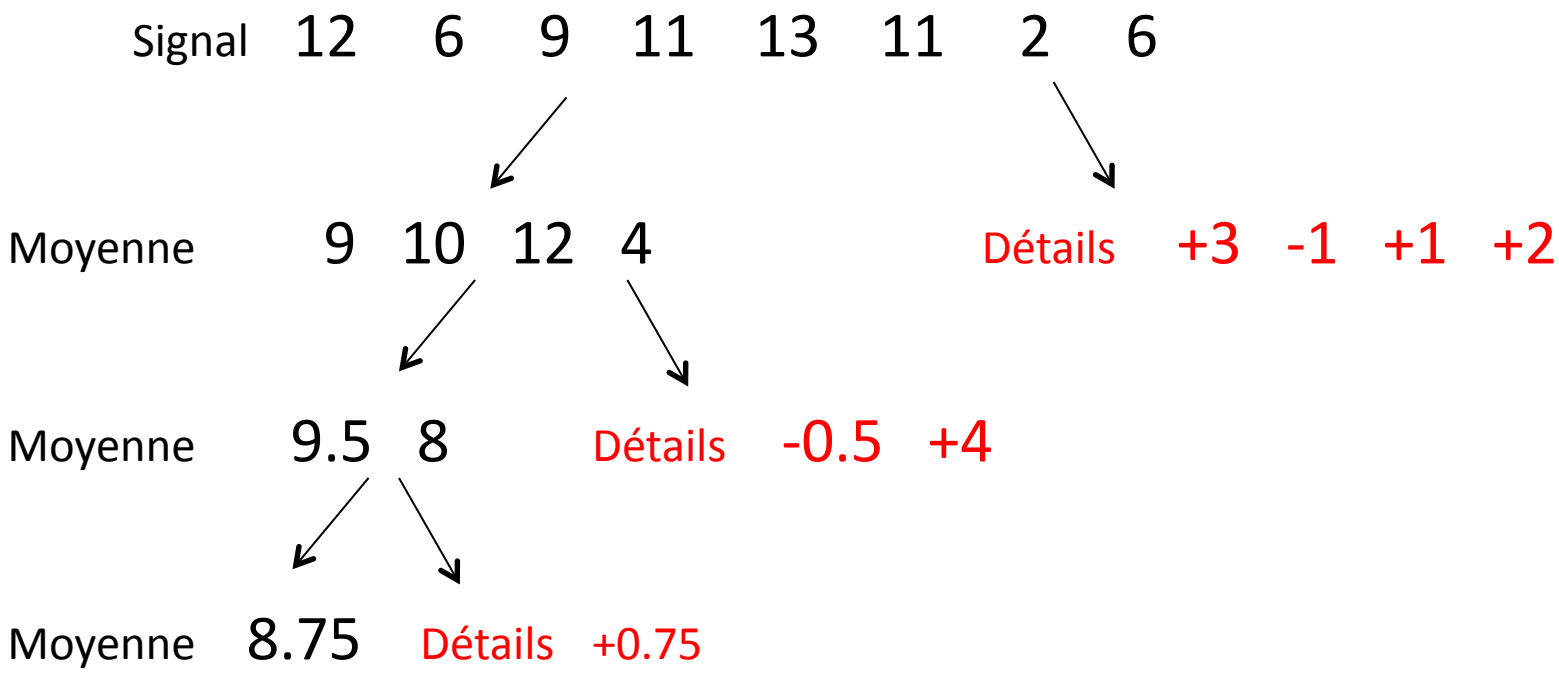
  - Résulte des travaux de Morlet dans les années 80, repris par les mathématiciens Meyer, Daubechies et Mallat dans les années 90.

- Les ondelettes

  - Une transformation par ondelettes consiste à décomposer un signal en une tendance grossière accompagnée de détails de plus en plus fins.

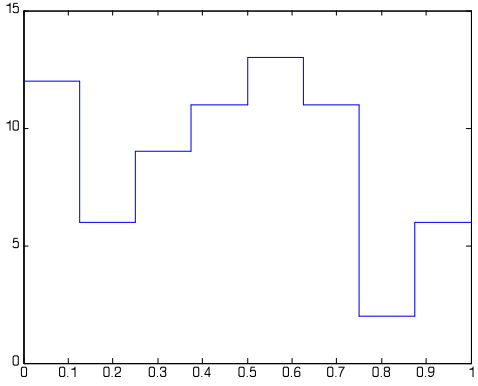
  - Ainsi, pour reconstituer le signal avec une précision donnée, il suffira de connaître la tendance et les détails correspondant au niveau de précision recherché et de négliger les autres.

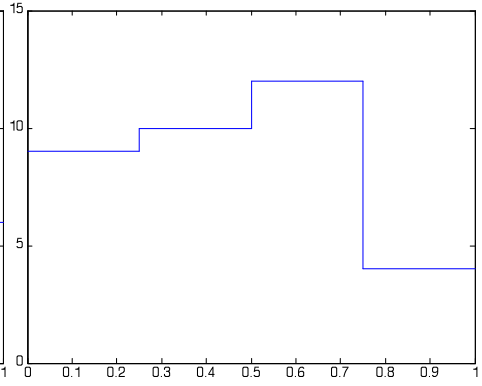
- Première approche

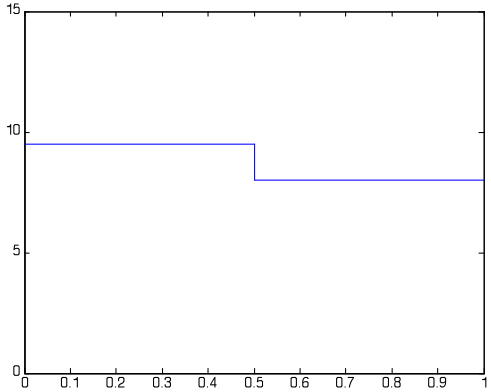


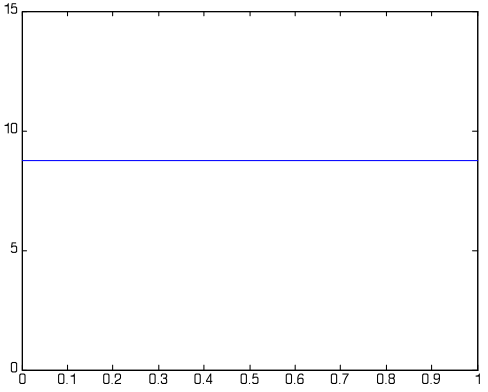
Autre représentation du signal 8.75 +0.75 -0.5 +4 +3 -1 +1 +2

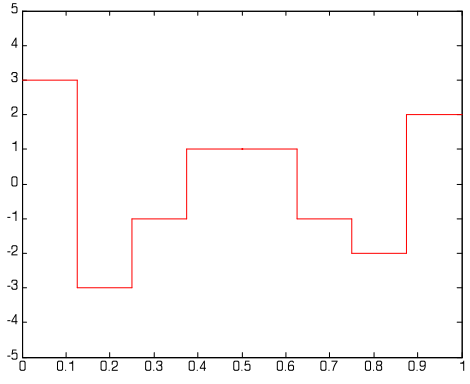
- Première approche

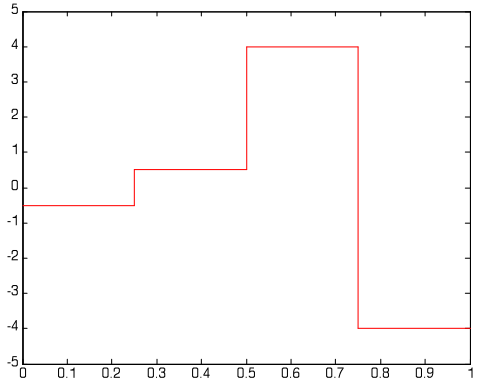


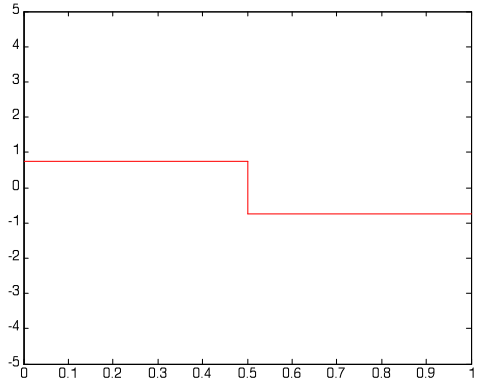






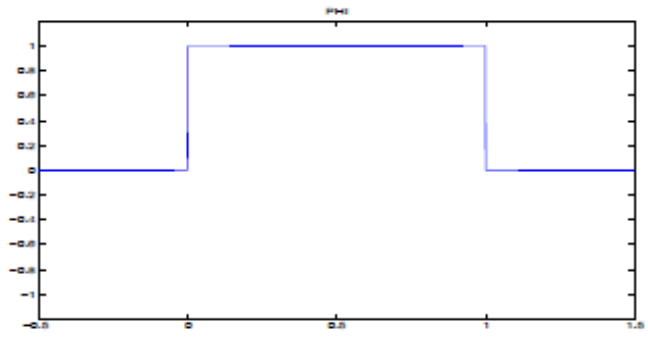


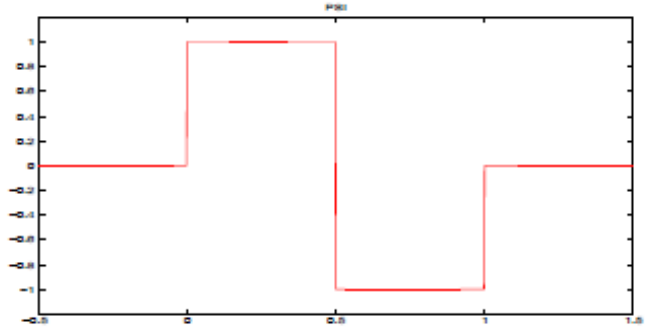




- Première approche

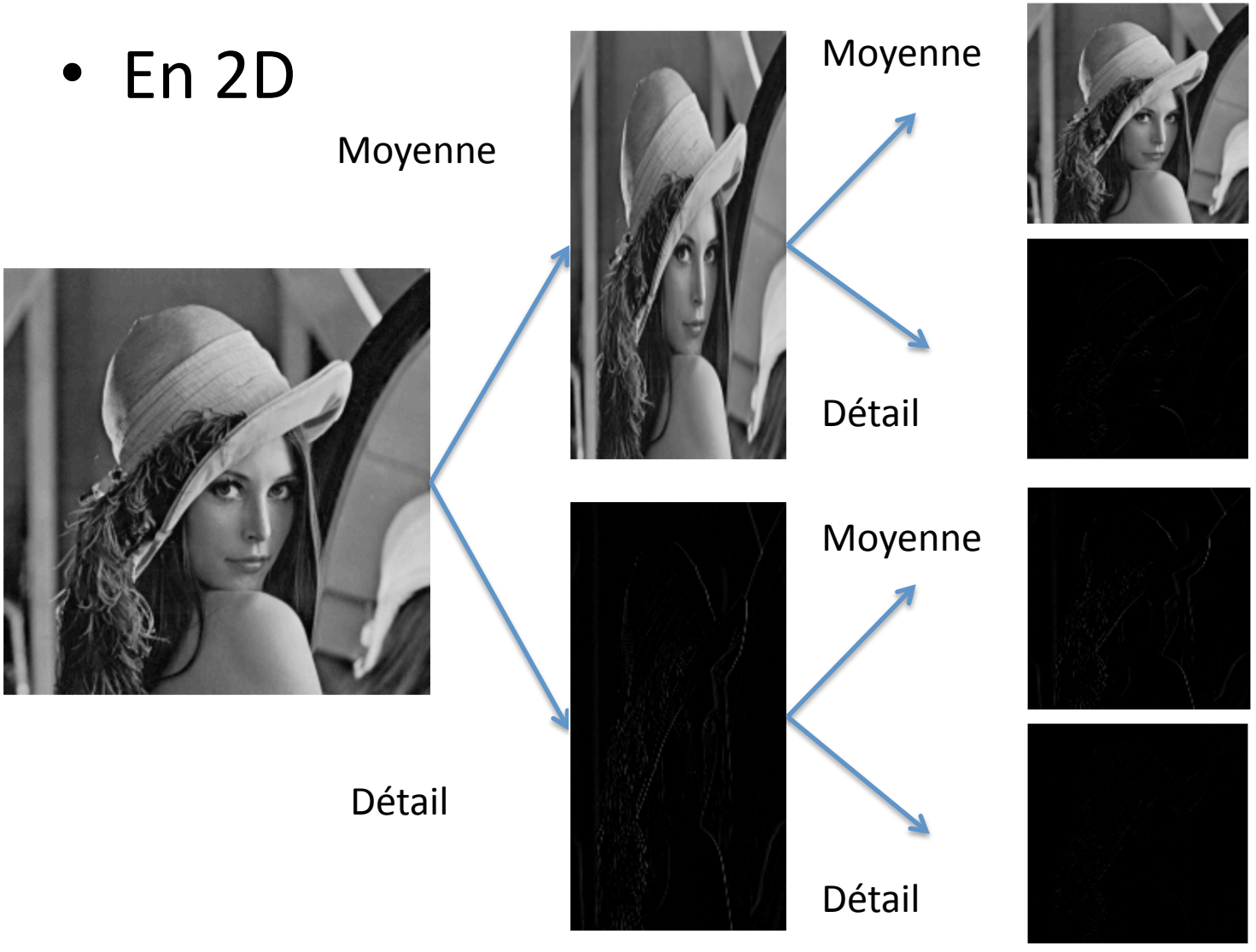
  On définit la base de Haar à partir de deux fonctions





Puis fonctions dépendant de 2 paramètres:
Translation k, niveau d'échelle j

- En 2D



Attention à la normalisation !

- En 2D

Attention à la normalisation !

Niveau 1

Niveau 2

- Seuillage

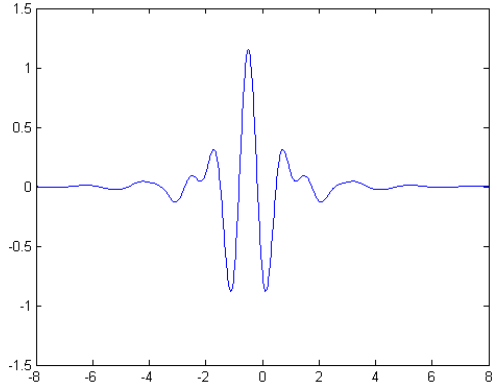
95% de compression

99% de compression

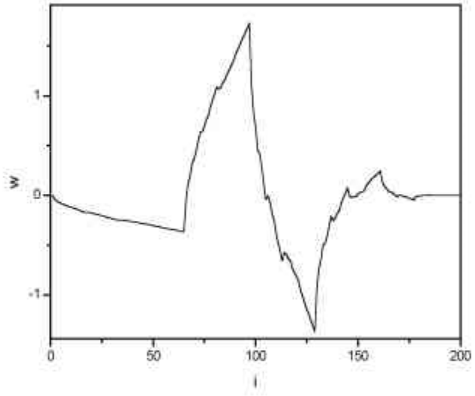
- Les ondelettes

  En réalité, la base de Haar n'est pas optimale pour faire de la compression.

  On préfère d'autres types de fonctions analysantes, continues (contrairement à celles de Haar).



Ondelette de Meyer



Ondelette de Daubechies

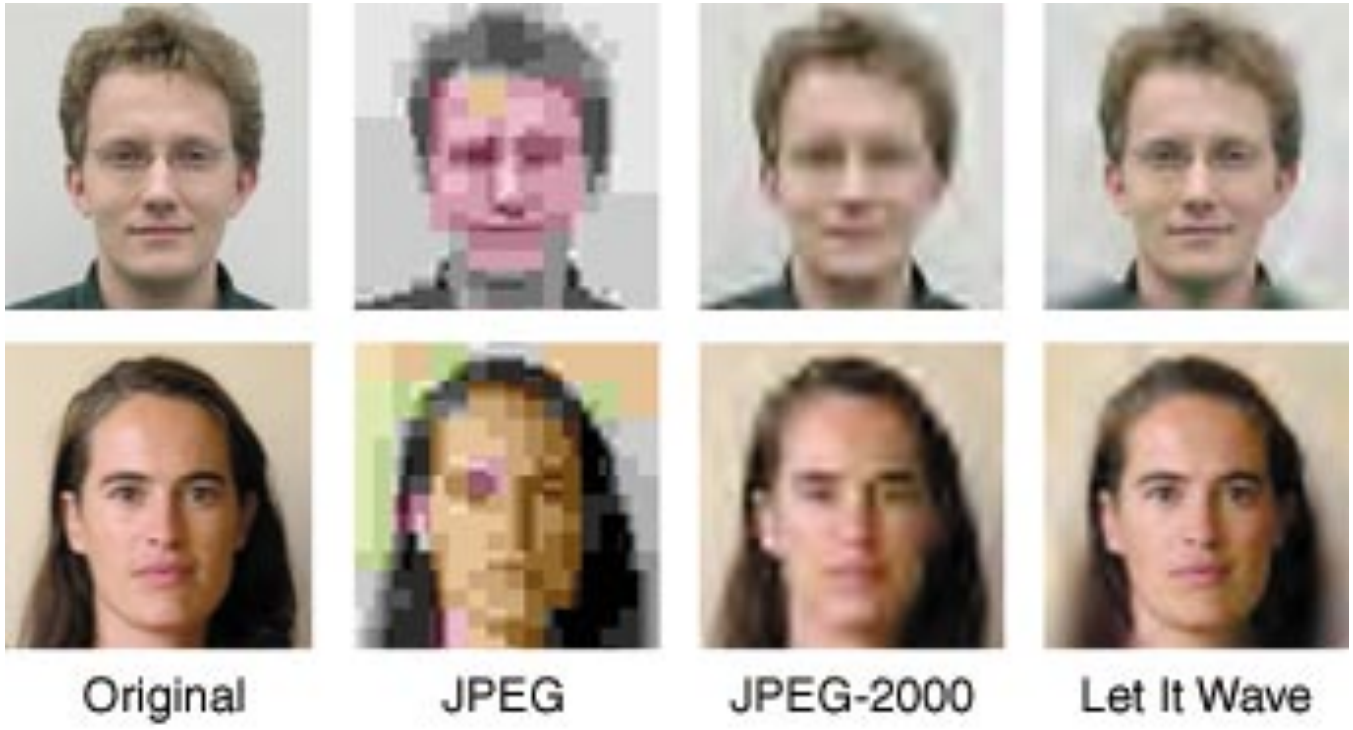
- Les ondelettes

  La transformée en ondelettes discrète peut être implémentée en une version rapide de complexité O(Nlog(N)) grâce aux travaux de Stéphane Mallat.

  Contrairement à la TF qui est une transformation **globale**, l'analyse en ondelettes s'attache aux aspects **multi-échelles** (du local au global) de l'image.

- Au-delà du JPEG 2000….

  Les bandelettes…



Codage sur 0.5 ko

6 - Autres utilisations de la visualisation

- Flocon de Koch
- Fractales de Julia
- Automates cellulaires (jeu de la vie)